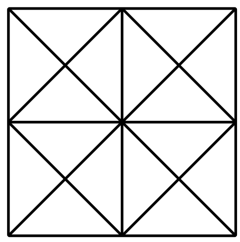
50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500521

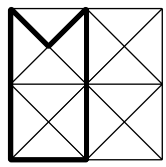
Niklas hat in der 1. Stufe der Mathematik-Olympiade in der rechts gezeigten Figur vorkommende Vierecke gezählt.



a) Susi findet in der Figur auch Fünfecke. Es gibt viele verschiedene Formen bzw. Größen. Dabei sollen sich die Fünfecke in Form oder Größe unterscheiden, sie sollen also nicht deckungsgleich sein.
Finde mindestens sechs dieser verschiedenen Fünfecke.
Zeichne für jedes deiner gefundenen Fünfecke eine neue Grundfigur und kennzeichne das Fünfeck farbig.

b) Niklas möchte Sechsecke in der Figur finden. Finde mindestens vier verschiedene Sechsecke und verfahre wie in Aufgabenteil a).

Hinweis: Die Fünfecke und Sechsecke können auch „eingedellt“ sein, wie in der kleinen nebenstehenden Abbildung für ein Fünfeck zu sehen ist. (Dieses Fünfeck kannst du natürlich nicht mehr angeben.)



500522

Merle und Mira betrachten auf der Wiese Marienkäfer und stellen fest, dass nicht alle die gleiche Anzahl von Punkten haben. Immer aber sind die Punkte auf den beiden Flügeln spiegelgleich angeordnet.

Für ihren Mathematikklub erfinden sie *eigene* Marienkäfer, die auch *ungleiche* Anzahlen von Punkten auf den beiden Flügeln haben können; aber jeder Flügel hat mindestens einen Punkt und höchstens sechs. Es gibt auch keine „geteilten“ Punkte. Da man bei Marienkäfern linke und rechte Flügel unterscheiden kann, soll der $(6\,|\,1)$-Marienkäfer ein anderer sein als der $(1\,|\,6)$-Marienkäfer; der $(6\,|\,1)$-Marienkäfer hat auf dem linken Flügel sechs Punkte und auf dem rechten Flügel einen Punkt.

a) Wie viele verschiedene Marienkäfer können sich die Mädchen ausdenken, wenn die Summe der Punkte auf beiden Flügeln zusammen nicht größer als 6 sein soll?

b) Merle malt zwei Marienkäfer, zeigt sie aber Mira nicht. Sie sagt ihr nur: „Zusammen haben beide Käfer 11 Punkte, und beim ersten Käfer habe ich auf den linken Flügel sechs Punkte gezeichnet.“ Welche Paare von Käfern kann Merle gezeichnet haben?

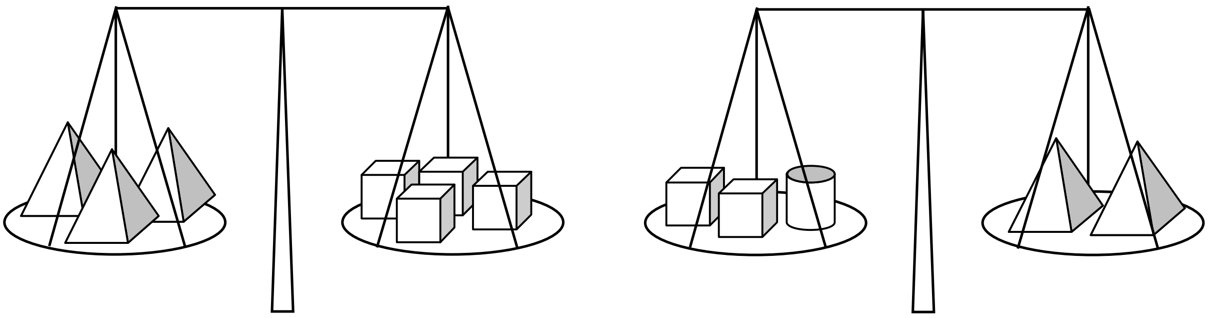
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500523

Die Waagen, siehe unten stehende Abbildung, seien jeweils im Gleichgewicht, das heißt:

(1) Drei Pyramiden sind so schwer wie vier Würfel.
(2) Zwei Pyramiden sind so schwer wie ein Zylinder und zwei Würfel.

Wie viele Zylinder sind so schwer wie eine Pyramide? Erläutere, wie du zu deiner Lösung gekommen bist.



500524

Die acht Schülerinnen Jule, Karo, Anne, Luisa, Nele, Rafaela, Svenja und Petra wollen nicht mehr an ihren Zweiertischen so sitzen wie bisher. Sie stellen folgende Forderungen für ihre neue Sitzordnung auf:

(1) Petra will neben Luisa oder neben Svenja sitzen.
(2) Nele will neben Anne oder neben Jule sitzen.
(3) Karo will neben Jule oder neben Luisa sitzen.
(4) Rafaela will neben Svenja oder neben Anne sitzen.
(5) Jule will nicht neben Karo sitzen und auch nicht neben Petra.

a) Gib eine Sitzordnung an, die alle Wünsche erfüllt. Wer sitzt dann neben wem? Begründe deine Antwort.

Am nächsten Tag fehlen Luisa und Petra, und im Musikraum müssen die sechs übrigen Mädchen an zwei Dreiertischen Platz nehmen. Allerdings ist das wieder nicht so einfach, denn sie stellen heute folgende Forderungen:

(1) Jule will links neben Nele oder links neben Anne sitzen.
(2) Karo will mit Jule an einem Tisch sitzen, und zwar rechts von Jule.
(3) Anne will nicht neben Svenja sitzen.
(4) Rafaela will in der Mitte sitzen, aber nicht neben Nele.
(5) Anne will außen sitzen.
(6) Svenja will mit Rafaela an einem Tisch sitzen, und zwar rechts von ihr.

b) Gib eine Sitzordnung an, die alle diese Wünsche erfüllt.

50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500621

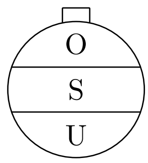
Carola und Manuela freuen sich über die wärmende Sonne im Frühling und summen das Lied „Alle Vögel sind schon da“ vor sich hin. In dem großen Kirschbaum sehen sie Amseln, Drosseln, Finken und Stare, die auch die Sonne genießen. Carola meint zu Manuela: „Ich zähle, wie viele Vögel es insgesamt sind, und du zählst, wie viele Vögel von welcher Art auf dem Baum sitzen.“

Carola stellt fest, dass es insgesamt 54 Vögel sind. Manuela fasst ihre Beobachtungen zusammen: „Es sind halb so viele Drosseln wie Amseln und dreimal so viele Finken wie Drosseln. Und dann bin ich sicher, dass es weniger als 15 Stare waren. Sie flogen so schnell weg, deshalb weiß ich es nicht genauer.“

Manuela überlegt eine Weile und sagt dann: „Das ist aber schade, denn nun können wir nicht genau ermitteln, wie viele Amseln, Drosseln, Finken und Stare in dem Baum saßen.“

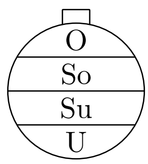
Ermittle alle Anzahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, und mache jeweils eine Probe.

500622



Die Firma *Goldi* produziert Dekorationsmaterial für Weihnachtsbäume, darunter auch Kugeln, die in der Mitte einen Streifen haben, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist. „O“ ist dabei der obere Bereich, „U“ der untere und „S“ der Streifen. Für diese Weihnachtsbaumkugeln mit einem Streifen stehen nur die Farben Blau, Gold und Silber zur Verfügung. Natürlich soll sich der Streifen vom oberen Bereich und vom unteren Bereich abheben.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln so zu färben?



Die Firma *Goldi* produziert auch Kugeln, die in der Mitte zwei aneinanderliegende Streifen „So“ und „Su“ haben, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist. Man möchte wieder die drei Farben Blau, Gold und Silber verwenden, und je zwei aneinanderstoßende Gebiete sollen sich in der Farbe unterscheiden.

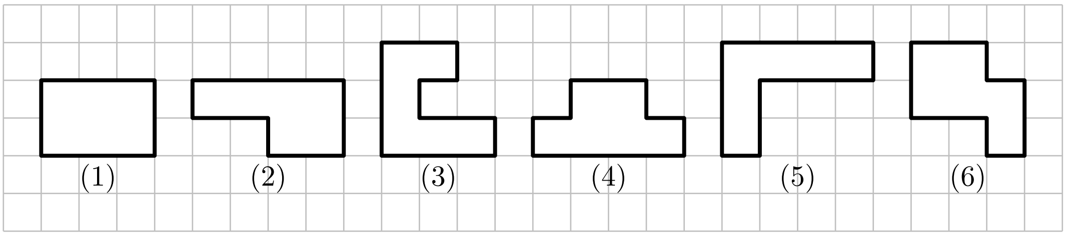
b) Der Lehrling sagt, es gäbe jetzt doppelt so viele Möglichkeiten wie bei den Kugeln mit einem Streifen (siehe a)). Entscheide, ob der Lehrling mit seiner Behauptung recht hat.

c) Nun wird der Lehrling ganz mutig und sagt: „Wenn wir noch Rot als vierte Farbe verwenden, dann erhalten wir ganz klar viermal so viel verschiedene Kugeln wie mit drei Farben (siehe b))!“ Entscheide wieder, ob der Lehrling damit recht hat.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500623

In einem Puzzle gibt es sechs verschiedene, rechtwinklige, flächengleiche Formen, die jeweils 6 Kästchen groß sind. Von jeder Form sind ausreichend Teile vorhanden, die auch gedreht und umgeklappt verwendet werden dürfen.



a) Lege aus Teilen zweier verschiedener Formen ein Rechteck, das 12 Kästchen groß ist. Lege aus Teilen mindestens zweier verschiedener Formen ein Rechteck, das 18 Kästchen groß ist; gib hierfür zwei unterschiedliche Möglichkeiten an.

b) Ein Quadrat soll mit mehreren Teilen mit der gleichen Form ausgelegt werden. Von unseren sechs Formen ist das für genau vier Formen möglich. Finde sie und gib jeweils das kleinste zugehörige Quadrat mit der Auslegung an.

c) Lege aus sechs Puzzle-Teilen ein Quadrat; dabei müssen vier der Formen vorkommen. Auf jeden Fall musst du die sechste Form verwenden.

500624

Jonas hat eine neue Uhr zum Geburtstag bekommen und will die Zeit einstellen. Beim Drehen der Zeiger betrachtet er die Winkel zwischen dem Stunden- und dem Minutenzeiger. Für die nächste Mathematikstunde denkt er sich dazu Aufgaben zu diesem Winkel aus.

(Es gibt natürlich immer zwei Winkel zwischen den beiden Zeigern, in den Aufgaben wird aber immer nach dem kleineren der beiden Winkel gefragt.)

a) Welchen Winkel bilden die Uhrzeiger um 16:00 Uhr miteinander?

b) Wie groß ist der Winkel um 20:30 Uhr?

c) Gib eine Uhrzeit zwischen 15:00 Uhr und 16:00 Uhr an, für die der kleinere der beiden Winkel zwischen den Zeigern $20°$ groß ist! Weise nach, dass deine Zeit die gestellte Bedingung erfüllt.

50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500721

Der folgenden Aufgabe liegt eine Problemstellung zugrunde, die Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (1180 – 1250), in seinem Buch „Liber Abaci" im Jahre 1202 veröffentlicht hatte.

Zwei Kaufleute, Pekunia und Moneta, reisen geschäftlich von Pisa nach Lucca, von da nach Florenz und dann zurück nach Pisa. In Lucca und in Florenz verdienen beide so viel, dass sich ihr Geld jeweils jedes Mal verdoppelt. Nach der Verdoppelung des Geldes geben beide in jeder dieser beiden Städte jeweils auch 12 Denare aus.

a) Als Pekunia heimgekehrt war, hatte er kein Geld mehr.
   Berechne, wie viele Denare Pekunia nach Lucca mitgenommen hatte.
b) Moneta kehrte mit doppelt so viel Geld zurück, wie er am Anfang der Reise hatte.
   Berechne, wie viele Denare Moneta mitgenommen hatte.

Mache jeweils eine Probe.

500722

In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, dass sie schwarz oder weiß sind und dass mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Die Kiste ist abgedeckt, so dass man die Farben, auch beim Hineingreifen, nicht sehen kann. Durch Tasten lassen sich verschiedenfarbige Kugeln in der Kiste nicht voneinander unterscheiden.

a) Untersuche, wie viele Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um sicher zu sein, dass unter ihnen mindestens 7 grüne Kugeln sind.
b) Untersuche, wie viele Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um sicher zu sein, dass unter ihnen mindestens eine Kugel schwarz ist.
c) Untersuche, wie viele Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um sicher zu sein, dass unter ihnen mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500723

Von einer ganzen Zahl z wird gefordert:

(1) Die Zahl z ist größer als 999 und kleiner als 10 000.
(2) Die Quersumme von z ist kleiner als 6.
(3) Die Quersumme von z ist Teiler von z.

Ermittle die Anzahl aller Zahlen z mit diesen Eigenschaften.

500724

Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D und E wird vorausgesetzt:

(1) Der Innenwinkel ACB ist ein rechter Winkel.
(2) Die Größe des Winkels BAC beträgt 60°.
(3) Die Winkelhalbierende des Innenwinkels BAC schneidet die Gerade BC im Punkt D.
(4) Die Winkelhalbierende des Winkels ADB schneidet die Gerade AB im Punkt E.
(5) Die Strecke $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie die Strecke $\overline{AC}$.

a) Beweise, dass das Dreieck ABD gleichschenklig ist.
b) Beweise, dass das Dreieck AEC gleichseitig ist.

50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500821

Bei einer 10 km langen Rennstrecke stimmen Startpunkt und Endpunkt überein. Bei einem Rennen werden zwei Runden von insgesamt 20 km auf dieser Strecke gefahren.

a) Ein Rennfahrer fährt die erste Runde „gemütlich" mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h. In der zweiten Runde möchte er so schnell fahren, dass er in beiden Runden insgesamt eine durchschnittliche Gesamtgeschwindigkeit von 200 km/h erreicht.

   Untersuche, ob dies möglich ist.

b) Angenommen, er fährt in der ersten Runde 150 km/h.

   Ermittle, wie schnell er in der zweiten Runde fahren müsste, um eine durchschnittliche Gesamtgeschwindigkeit von 200 km/h zu erreichen.

500822

Wir betrachten ein Spiel aus 50 gelben und 50 roten Chips. Eine bestimmte Anzahl von solchen Chips soll derart in eine Reihe aneinandergelegt werden, dass nie zwei rote Chips aneinanderliegen. Zwei gelbe Chips dürfen jedoch aneinanderliegen.

Zwei Reihen werden dabei genau dann als gleich betrachtet, wenn die Chips an gleicher Position die gleiche Farbe haben.

a) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 4 Chips zu legen.
b) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 5 Chips zu legen.
c) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, eine solche Reihe mit 10 Chips zu legen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500823

Gegeben ist ein Dreieck ABC, in dem die Größen der Innenwinkel BAC, CBA, ACB wie üblich mit α, β, γ bezeichnet sind.

Das Dreieck ABC und zwei Punkte D und E haben die folgenden Eigenschaften:

(1) Auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Punkt A hinaus liegt der Punkt D so, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind.

(2) Auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Punkt B hinaus liegt der Punkt E so, dass die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind.

a) Berechne die Größe φ des Winkels DCE, falls $\alpha = 30°$ gilt und dabei β doppelt so groß wie α ist.

b) Beweise, dass unter den Voraussetzungen (1) und (2) für die Größe φ des Winkels DCE stets $\varphi = 90° + \frac{1}{2}\gamma$ gilt.

c) Bestimme, unter welchen Bedingungen an die Innenwinkel des Dreiecks ABC das Dreieck DEC gleichschenklig ist.

500824

Einen Bruch, dessen Zähler 1 ist und dessen Nenner eine positive ganze Zahl ist, bezeichnet man als Stammbruch. Wenn es gelingt, einen Bruch als Summe von Stammbrüchen darzustellen, nennen wir diese Summendarstellung auch Zerlegung in Stammbrüche.

Beispiele:

$$\frac{3}{22} = \frac{1}{11} + \frac{1}{22}, \qquad \frac{31}{30} = \frac{1}{1} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \qquad \frac{303}{700} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25}.$$

a) Stelle $\frac{3}{20}$ als Summe zweier Stammbrüche dar.

b) Es seien a und b positive ganze Zahlen mit $a < b$.

Beweise: Wenn x und y positive ganze Zahlen mit $x \leq y$ und $\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sind, dann gelten $y = \frac{bx}{ax - b}$ und $\frac{b}{a} < x \leq \frac{2b}{a}$.

c) Ermittle alle bis auf Reihenfolge der Summanden verschiedenen Möglichkeiten, $\frac{3}{20}$ als Summe zweier Stammbrüche darzustellen.

d) Stelle $\frac{5}{17}$ als Summe von paarweise verschiedenen Stammbrüchen dar.

50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

500921

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 15 sollen so in einer Reihe aufgeschrieben werden, dass jede der fünfzehn Zahlen genau einmal vorkommt und die Summe je zweier benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ist.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten!

500922

a) Geben Sie die Anzahl aller zweistelligen Zahlen an, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller dreistelligen Zahlen, die keine Ziffer 5 enthalten.

c) Untersuchen Sie, ob es mehr 50-stellige Zahlen gibt, in denen die Ziffer 5 nicht vorkommt, als solche, in denen sie mindestens einmal vorkommt.

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste nicht Null sein darf. Beispielsweise ist die Zahl 3462 vierstellig, die Ziffernfolge 0743 stellt hingegen keine vierstellige Zahl dar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500923

a) Der Bruch $\frac{62}{63}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die sowohl verschiedene Zähler als auch verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 63 sein.

   Bestimmen Sie drei verschiedene solche Darstellungen. Dabei zählen zwei Darstellungen auch als gleich, wenn sie sich allein in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

b) Der Bruch $\frac{20}{21}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die gleiche Zähler, aber verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 21 sein.

   Bestimmen Sie alle solchen Darstellungen. Auch hier soll die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielen.

Hinweis: Ein *Bruch* b ist stets eine *positive* rationale Zahl. Die Darstellung $b = \frac{p}{q}$ heißt *vollständig gekürzt*, wenn $p > 0$ und $q > 0$ gilt und p, q teilerfremd sind.

500924

Im Inneren eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u.

Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}u < x + y + z < u$$

gilt.

50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501021

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen a die Gleichung $(x^2 - a)(x^2 + 2ax - a) = 0$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei bzw. mehr als drei reelle Lösungen besitzt.

501022

Wir betrachten das Vorkommen verschiedener Ziffern in n-stelligen Zahlen.

a) Geben Sie die Anzahl aller zweistelligen Zahlen an, die keine Ziffer 3 enthalten.

b) Es sei x die Anzahl aller dreistelligen Zahlen, die die Ziffer 4 nicht enthalten, und y sei die Anzahl der dreistelligen Zahlen, die die Ziffer 4 mindestens einmal enthalten. Ermitteln Sie die Anzahlen x und y und geben Sie das gekürzte Verhältnis $x : y$ an.

c) Ermitteln Sie die größte Stellenzahl n, für die gilt: Es gibt mehr n-stellige natürliche Zahlen, in denen die Ziffer 5 nicht vorkommt, als solche, in denen sie mindestens einmal vorkommt.

Hinweis: Eine Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste nicht Null sein darf. Beispielsweise ist die Zahl 3462 also vierstellig, die Ziffernfolge 0743 stellt hingegen keine vierstellige Zahl dar.

501023

Im Inneren eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u.

Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}u < x + y + z < u$$

gilt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

501024

Wir betrachten in dieser Aufgabe Rechtecke R_1 und R_2, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(1) Die Seitenlängen der Rechtecke sind positive ganze Zahlen.

(2) Der Flächeninhalt des Rechtecks R_2 ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks R_1.

(3) Die beiden Rechtecke haben den gleichen Umfang u.

Nun die drei Teile der Aufgabe:

a) Bestimmen Sie alle möglichen Seitenlängen solcher Rechtecke R_1 und R_2, deren Umfang $u = 34$ beträgt.

b) Seien R_1 und R_2 zwei Rechtecke, die obige drei Bedingungen erfüllen und für die $u > 34$ gilt.
Zeigen Sie, dass die Länge der Diagonalen des Rechtecks R_2 ebenfalls ganzzahlig ist.

c) Es sei umgekehrt R_2 ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen, ganzzahliger Diagonalenlänge und $u > 34$.
Zeigen Sie, dass es dazu stets ein Rechteck R_1 gibt, welches die obigen drei Bedingungen erfüllt.

50. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501321

Gegeben sind neun positive ganze Zahlen, die in einer solchen Reihenfolge angeordnet sind, dass die Summe von jeweils drei aufeinander folgenden Zahlen gleich ist. Die erste Zahl in der Reihenfolge ist 450, die letzte 50. Die Summe aller Zahlen beträgt 2010.

Man bestimme alle neun Zahlen.

501322

Zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b sind so angeordnet, dass sich jeweils zwei benachbarte Eckpunkte auf einem Kreis k befinden und die beiden anderen auf einer Sehne s von k liegen (siehe Abbildung A 501322).

a) Man bestimme den Abstand des Mittelpunkts M des Kreises k von der Sehne s in Abhängigkeit von a und b.

b) Man untersuche, welche Werte das Verhältnis der Seitenlängen a und b der Quadrate annehmen kann.

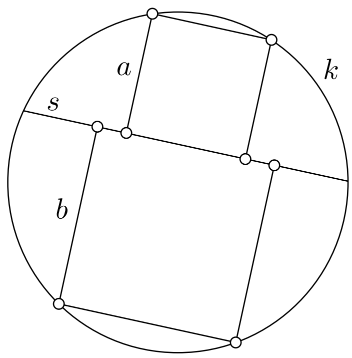


Abbildung A 501322

501323

In Abhängigkeit von der reellen Zahl a ermittle man alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\sqrt{2x^2+3} < x - a$$

erfüllen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

501324

An eine anfangs kreisförmige Schneeflocke lagert sich in jeder Minute eine neue Schicht an. Jede derartige Schicht besteht aus einer Kette von Kreisen, die sich von außen um die Schneeflocke herumlegt. Dabei sollen nach n Minuten, also nach Anlagerung der n-ten Schicht, jeweils folgende Bedingungen gelten:

(i) Jeder Kreis der neuen n-ten Schicht berührt genau einen oder genau zwei Kreise der vorangehenden $(n-1)$-ten Schicht. (Hierbei gilt die anfängliche kreisförmige Flocke als 0-te Schicht.)

(ii) Jeder Kreis der n-ten Schicht berührt genau zwei Kreise der n-ten Schicht.

(iii) Für $n \geq 2$ werden je zwei benachbarte Kreise der vorangehenden $(n-1)$-ten Schicht gemeinsam von genau einem Kreis der neuen n-ten Schicht berührt.

(iv) Jeder Kreis, der nicht der n-ten Schicht angehört, wird von genau sieben Kreisen berührt.

Abbildung A 501324 zeigt eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten Schicht und eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten und der zweiten Schicht.

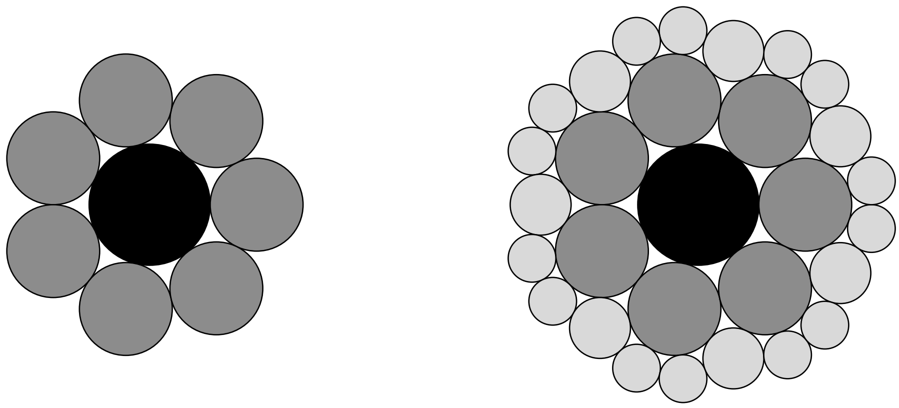


Abbildung A 501324

Nach der Anlagerung von n Schichten bezeichne x_n die Anzahl aller Kreise mit genau 3 und y_n die Anzahl aller Kreise mit genau 4 Nachbarn. Man bestimme alle Zahlen n, für die das Verhältnis $\frac{x_n}{y_n}$ den Wert $\frac{5}{3}$ hat.

Bemerkung: Es darf vorausgesetzt werden, dass die Anlagerung jeder neuen Schicht möglich ist.